Multivector Physics

Kim GinHak

경기도 부천시 지봉로 77 번길 35 101-203

(Submitted 27 September 2025)

Using multivectors and the curl instead of the electromagnetic tensor, Maxwell's equations can be derived from vector potentials. We can also see that vector potential, electromagnetic field, charge density, current etc. are multi-vectors with different dimensions. By changing the dimension of the vector potential, we can obtain Maxwell's equations for the weak, strong, and gravitational forces, also find the dimensions and properties of mass, charge, spin, color, and Higgs. Defining the norm of a multivector simultaneously defines the multiplication of the multi-basis. Just as the Pauli spin matrix is a quaternion, the multi-bases in 4 dimensions are sedenion. Using the curl, we can derive forces from the energy density expressed as a multivector. Depending on the dimension of the vector potential, the electromagnetic, weak, strong, and gravitational forces are derived.

다중벡터 물리

김진학

경기도 부천시 지봉로 77 번길 35 101-203

(2025 년 8 월 27 일 투고)

전자기장 텐서 대신에 다중벡터와 컬연산자를 사용하여 벡터 퍼텐셜로부터 맥스웰 방정식을 유도할 수 있다. 벡터 퍼텐셜, 전자기장, 전하밀도, 전류 등이 차원이 다른 다중벡터라는 것도 알 수 있다. 벡터 퍼텐셜의 차원을 바꾸면 약력, 강력, 중력에 대한 맥스웰 방정식도 얻을 수 있고, 질량, 전하, 스핀, 칼라, 히그스의 차원과 특성도 알 수 있다. 다중벡터의 노름을 정의하면 다중기저의 곱셈이 동시에 정의된다. 파울리 스핀 행렬이 4 원수이듯이 4 차원에서 다중기저는 16 원수이다. 컬연산자를 이용해서, 다중벡터로 표현된 에너지밀도에서 힘을 구할 수 있다. 벡터 퍼텐셜의 차원에 따라 전자기력, 약력, 강력, 중력이 구해진다.

Ⅰ. 서론

다중벡터를 소개하고 다중벡터에서 컬연산자를 정의한다. 다이버전스 연산자는 새로운 연산자가 아이라 쌍대 벡터장에 대한 컬연산자이다. 벡터장이 연속이라는 것이 벡터장의 다이버전스가 0 이라는 것을 설명한다.

1. 다중벡터

다중벡터는 여러 개의 1-벡터를 쐐기(∧)로 곱하여 표현한다. $v_1, v_2, \dots, v_r$ 가 1-벡터라면 $(v_1 \wedge v_2)$는 2-벡터이고 $(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$는 3-벡터이다. 이 글에서 벡터는 다중벡터를 의미한다. 벡터는 쐐기 곱셈의 순서에 따라 부호가 바뀐다.

$$(v_1 \wedge v_2) = -(v_2 \wedge v_1), \qquad (v_1 \wedge v_1) = 0$$

$$(v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = \varepsilon_{ijk}(v_i \wedge v_j \wedge v_k), \qquad i,j,k = 1,2,3, \qquad \varepsilon_{ijk}: \textit{레비치비타 기호}$$

2. 내적

벡터의 내적은 교환법칙이 성립하고, 정의는 다음과 같다. a, b, c 가 1-벡터라면,

$$a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)$$
$$= (-1)^{i-1}(a \cdot v_i)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \ldots \wedge v_r), \qquad \textit{아인슈타인 합규약}$$
$$= (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) \cdot a$$

예) $a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3)$
$$= (a \cdot v_1)(v_2 \wedge v_3) - (a \cdot v_2)(v_1 \wedge v_3) + (a \cdot v_3)(v_1 \wedge v_2)$$

$$(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}$$

예) $(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) = b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}$
$$= b \cdot \{(a \cdot v_1)(v_2 \wedge v_3) - (a \cdot v_2)(v_1 \wedge v_3) + (a \cdot v_3)(v_1 \wedge v_2)\}$$
$$= \{(a \cdot v_1)(b \cdot v_2) - (a \cdot v_2)(b \cdot v_1)\}v_3 - \{(a \cdot v_1)(b \cdot v_3) - (a \cdot v_3)(b \cdot v_1)\}v_2$$
$$+\{(a \cdot v_2)(b \cdot v_3) - (a \cdot v_3)(b \cdot v_2)\}v_1$$

위의 식에서 a와 b를 서로 바꾸거나, a와 b가 같다면, 다음 성질도 알 수 있다.

$$(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = -(b \wedge a) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)$$
$$b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\} = -a \cdot \{b \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}$$

$$(a \wedge a) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = a \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\} = 0$$
$$(a \wedge b \wedge c) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = c \cdot [b \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}]$$
$$= c \cdot \{(a \wedge b) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\} = (b \wedge c) \cdot \{a \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)\}$$

$w_1, w_2, \ldots, w_r$도 1-벡터라면,

$$(w_1 \wedge w_2 \wedge \ldots \wedge w_r) \cdot (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) = \left|(v_i \cdot w_j)\right| = det(v_i \cdot w_j)$$

3. 쌍대벡터

n 차원에서 직각 좌표 기저 $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \ldots, \mathbb{e}_n$로 이루어진 n-벡터를 단위 유사 스칼라 I 라 한다.

$$I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \ldots \wedge \mathbb{e}_n$$

$v = (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r)$이라면, v 의 쌍대벡터 v^d를 다음처럼 정의한다.

$v^d = v \cdot I$ 　　특별히 $I^d = 1$, $1^d = I$이다.

v와 v^d는 서로 수직하고 1:1 이다.

$$v \cdot v^d = (v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) \cdot \{(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) \cdot I\}$$
$$=(v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r \wedge v_1 \wedge v_2 \wedge \ldots \wedge v_r) \cdot I = 0$$

예를 들어 3 차원에서

$$I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3, \qquad \mathbb{e}_1^d = \mathbb{e}_1 \cdot I = \mathbb{e}_1 \cdot (\mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3) = (\mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3)$$

$(\mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3)$을 $\mathbb{e}_2$과 $\mathbb{e}_3$가 만드는 평면이라면, $\mathbb{e}_1$은 그 평면에 수직한 벡터이다.

4. 기저와 역기저

미분 가능한 n 차원에서 점은 $P(p^1, p^2, \dots, p^n)$이고, 원점 O에서 P까지의 벡터를 의미한다. 점 $P(p^1, p^2, \dots, p^n)$에서 기저 u_i는 다음처럼 정의한다.

$$u_i = \frac{\partial P}{\partial p^i}$$

$u^i \cdot u_j = \delta^i_j$일 때, $u^1, u^2 \dots u^n$가 P에서 역기저이다. 행렬 g^{ij}와 g_{jk}를 가정하여 그 점의 u^i는 u_j로 또 u_i는 u^j로 표현할 수 있다.

$$u^i = g^{ij} u_j, \qquad u^i \cdot u^k = g^{ij} u_j \cdot u^k = g^{ik}$$

$$u_i = g_{ij} u^j, \qquad u_i \cdot u_k = g_{ij} u^j \cdot u_k = g_{ik}$$

여기서, g_{jk}와 g^{ij}는 역행렬 관계이다.

$$u^i \cdot u_k = g^{ij} u_j \cdot u_k = g^{ij} g_{jk} = \delta^i_k$$

따라서, P에서 기저를 구하고, 행렬 $g_{ij} = u_i \cdot u_j$을 구한 다음 역행렬 g^{ij}을 구하면 그 점의 역기저를 구할 수 있다.

5. 무한소 입체 $[dV]_r$와 그 경계 $\partial[dV]_r$

$[dV]_r$은 r-벡터이다. 아주 작은 r 차원의 평행육면체 같은 것을 의미한다. 기준점은 $P(p^1, p^2, \dots, p^n)$이다. r 개의 모서리는 $u_{\sigma_1} dp^{\sigma_1}, u_{\sigma_2} dp^{\sigma_2}, \dots, u_{\sigma_r} dp^{\sigma_r}$이다.

$$[dV]_r = \left(u_{\sigma_1} \wedge u_{\sigma_2} \wedge \dots \wedge u_{\sigma_r}\right) dp^{\sigma_1} dp^{\sigma_2} \dots dp^{\sigma_r}$$

$$\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\} \subset \{1, 2, \dots, n\}, \qquad (\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_r)$$

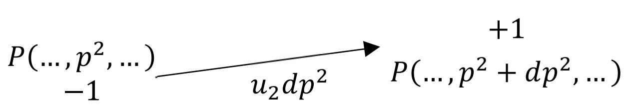
예) $\quad [dV]_3 = (u_1 \wedge u_3 \wedge u_4) dp^1 dp^3 dp^4$

$[dV]_r$의 표면에 있는 2r 개의 (r-1)-벡터 경계가 $\partial[dV]_r$이다.

$$\partial[dV]_r = \frac{\pm u^i}{dp^i} \cdot [dV]_r = \begin{cases} \dfrac{+u^i}{dp^i} \cdot [dV]_r \quad at\ P(\dots, p^i + dp^i, \dots) \\ \dfrac{-u^i}{dp^i} \cdot [dV]_r \quad at\ P(\dots, p^i, \dots) \end{cases}$$

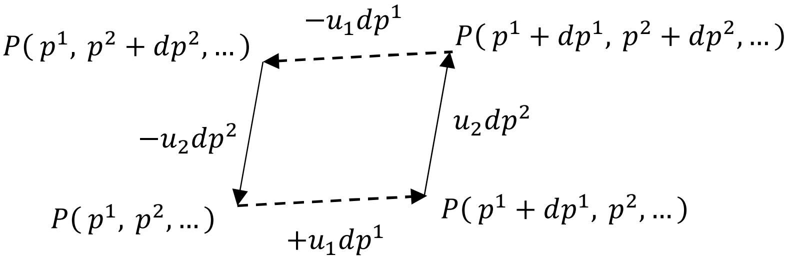
다음은 $[dV]_1 = u_2 dp^2$와 $[dV]_2 = (u_1 \wedge u_2) dp^1 dp^2$에 대한 $\partial[dV]_1$와 $\partial[dV]_2$의 예이다.

$$\partial[dV]_1 = \frac{\pm u^i}{dp^i} \cdot [dV]_1 = \begin{cases} \dfrac{+u^2}{dp^2} \cdot u_2 dp^2 = 1 \quad at\ P(\dots, p^2 + dp^2, \dots) \\ \dfrac{-u^2}{dp^2} \cdot u_2 dp^2 = -1 \quad at\ P(\dots, p^2, \dots) \end{cases}$$



$\partial[dV]_1$는 ± 1이다. 인접한 $\partial[dV]_1$와 부호가 반대이다. 적분할 때 상쇄된다.

$$\partial[dV]_2 = \frac{\pm u^i}{dp^i}\cdot[dV]_2 = \begin{cases} \frac{+u^1}{dp^1}\cdot(u_1\wedge u_2)dp^1dp^2 = +u_2dp^2 & at\ P(\dots,p^1+dp^1,\dots) \\ \frac{-u^1}{dp^1}\cdot(u_1\wedge u_2)dp^1dp^2 = -u_2dp^2 & at\ P(\dots,p^1,\dots) \\ \frac{+u^2}{dp^2}\cdot(u_1\wedge u_2)dp^1dp^2 = -u_1dp^1 & at\ P(\dots,p^2+dp^2,\dots) \\ \frac{-u^2}{dp^2}\cdot(u_1\wedge u_2)dp^1dp^2 = +u_1dp^1 & at\ P(\dots,p^2,\dots) \end{cases}$$



$\partial[dV]_2$는 $[dV]_2$의 경계를 한 방향으로 돈다. 인접한 $\partial[dV]_2$와는 반대 방향이다. 적분할 때 상쇄된다. 스토크스 정리를 유도할 수 있다.

6. 컬연산자

n 차원에서 r-벡터장 A

예) 3-벡터장 $A = A_{ijk}(u^i\wedge u^j\wedge u^k),\ (i<j<k)$

$curl(A)$의 정의는 수식 그 차체이다. (r-1)-벡터장 A에는 다음 식이 성립한다.

$$A\cdot\partial[dV]_r = A\cdot\left(\frac{\pm u^i}{dp^i}\cdot[dV]_r\right) = \left(\frac{\pm u^i}{dp^i}\wedge A\right)\cdot[dV]_r = \left(u^i\wedge\frac{\pm A}{dp^i}\right)\cdot[dV]_r$$

$$= \left(u^i\wedge\frac{A}{\partial p^i}\right)\cdot[dV]_r = curl(A)\cdot[dV]_r\,,\qquad curl(A) = u^i\wedge\frac{A}{\partial p^i}$$

적분하면 스토크스 정리이다.

$$\oint A\cdot\partial[dV]_r = \oint curl(A)\cdot[dV]_r$$

미적분학에서 벡터장은 역기저로 써야 된다. 그러면 내적으로 기저가 상쇄되어 A의 계수만 미분해 $curl(A)$를 구하면 된다. 이미 직각 좌표에서는 역기저를 쓰고 있다. 공변 미분은 사족이다.

$$curl^2(A) = curl\{curl(A)\}$$
$$= u^j\wedge u^i\wedge\frac{\partial^2 A}{\partial p^j\partial p^i} = u^i\wedge u^j\wedge\frac{\partial^2 A}{\partial p^i\partial p^j} = -u^j\wedge u^i\wedge\frac{\partial^2 A}{\partial p^j\partial p^i} = 0$$

A와 $curl(A)$가 모두 0이 아니면 $curl^2(A)$도 없지만 $curl(B) = A$인 B도 없다. $curl^2(B) = 0 \neq curl(A)$. A와 $curl(A)$ 이 둘은 한 존재의 차원이 다른 두 모습이다.

7. 컬연산자 검증

잘 알려진 구면좌표의 1-벡터장 $A = A_r \mathbb{e}_r + A_\theta \mathbb{e}_\theta + A_\emptyset \mathbb{e}_\emptyset$로 컬연산자의 정의를 검증해보자. 먼저 $\mathbb{e}_r, \mathbb{e}_\theta, \mathbb{e}_\emptyset$를 구면좌표의 기저 $u^r, u^\theta, u^\emptyset$로 바꾸어 계산하고 결과를 다시 $\mathbb{e}_r, \mathbb{e}_\theta, \mathbb{e}_\emptyset$로 환산해서 확인하면 된다.

$$p^1 = r, \qquad p^2 = \theta, \qquad p^3 = \emptyset$$

$$u_r = \frac{\partial P}{\partial r} = \mathbb{e}_r, \qquad u_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta} = r\mathbb{e}_\theta, \qquad u_\emptyset = \frac{\partial P}{\partial \emptyset} = r\,sin\,\theta\,\mathbb{e}_\emptyset$$

$$u^i \cdot u_k = \delta^i_k, \qquad u^r = \mathbb{e}_r, \qquad u^\theta = \frac{\mathbb{e}_\theta}{r}, \qquad u^\emptyset = \frac{\mathbb{e}_\emptyset}{r\,sin\,\theta}$$

$$A = A_r \mathbb{e}_r + A_\theta \mathbb{e}_\theta + A_\emptyset \mathbb{e}_\emptyset = A_r u^r + A_\theta r u^\theta + A_\emptyset r\,sin\,\theta\,u^\emptyset$$

항이 많으므로 $(u^\theta \wedge u^\emptyset)$ 항만 계산해보자.

$$curl(A) = u^i \wedge \frac{A}{\partial p^i}$$

$$u^\theta \wedge \frac{\partial(A_\emptyset r\,sin\,\theta)}{\partial \theta} u^\emptyset + u^\emptyset \wedge \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial \emptyset} u^\theta = \left\{\frac{\partial(A_\emptyset r\,sin\,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial \emptyset}\right\}(u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$= \frac{1}{r^2\,sin\,\theta}\left\{\frac{\partial(A_\emptyset r\,sin\,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(A_\theta r)}{\partial \emptyset}\right\}(\mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset)$$

관행적 결과와 계수는 같다. 하지만 $\mathbb{e}_r$ 항이 아니라 $(\mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset)$ 항이라는 것이다. 이 둘은 서로 쌍대기저이다. 불행하게 우리는 이 둘을 구분하지 못한다.

8. 다이버전스

다이버전스는 쌍대벡터에 대한 컬연산자이다.

$$div(A) = curl(A^d), \qquad A^d = A \cdot I$$

같은 벡터장 $A = A_r \mathbb{e}_r + A_\theta \mathbb{e}_\theta + A_\emptyset \mathbb{e}_\emptyset$를 예로 들자. 3 차원에서

$$A = A_r \mathbb{e}_r + A_\theta \mathbb{e}_\theta + A_\emptyset \mathbb{e}_\emptyset = A_r u_r + \frac{A_\theta}{r} u_\theta + \frac{A_\emptyset}{r\,sin\,\theta} u_\emptyset$$

$$I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3 = \mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset = r^2\,sin\,\theta\,(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$\mathbb{e}_r = sin\,\theta\,cos\,\emptyset\,\mathbb{e}_1 + sin\,\theta\,sin\,\emptyset\,\mathbb{e}_2 + cos\,\theta\,\mathbb{e}_3$$

$$\mathbb{e}_\theta = cos\,\theta\,cos\,\emptyset\,\mathbb{e}_1 + cos\,\theta\,sin\,\emptyset\,\mathbb{e}_2 - sin\,\theta\,\mathbb{e}_3 \ldots$$

$$\mathbb{e}_\emptyset = -\,sin\,\emptyset\,\mathbb{e}_1 + cos\,\emptyset\,\mathbb{e}_2 \ldots$$

$$A^d = A \cdot I = \left(A_r u_r + \frac{A_\theta}{r} u_\theta + \frac{A_\emptyset}{r\,sin\,\theta} u_\emptyset\right) \cdot r^2\,sin\,\theta\,(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$= A_r r^2\,sin\,\theta\,(u^\theta \wedge u^\emptyset) - A_\theta r\,sin\,\theta\,(u^r \wedge u^\emptyset) + A_\emptyset r(u^r \wedge u^\theta)$$

$$div(A) = curl(A^d) = u^i \wedge \frac{\partial A^d}{\partial p^i}$$

$$= \left\{\frac{\partial(A_r r^2\,sin\,\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta r\,sin\,\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(A_\emptyset r)}{\partial \emptyset}\right\}(u^r \wedge u^\theta \wedge u^\emptyset)$$

$$= \frac{1}{r^2\,sin\,\theta}\left\{\frac{\partial(A_r r^2\,sin\,\theta)}{\partial r} + \frac{\partial(A_\theta r\,sin\,\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(A_\emptyset r)}{\partial \emptyset}\right\}(\mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset)$$

역시 관행적 결과와 계수는 같지만, 스칼라 항이 아니라 유사 스칼라 항이라는 것이다.

$(\mathbb{e}_r \wedge \mathbb{e}_\theta \wedge \mathbb{e}_\emptyset) = I$ 이 둘도 서로 쌍대기저이다.

9. 연속 $div(A) = 0$

$$div(A) \cdot [dV]_r = curl(A^d) \cdot [dV]_r = A^d \cdot \partial[dV]_r = (A \cdot I) \cdot \partial[dV]_r$$
$$= (A \wedge \partial[dV]_r) \cdot I$$

$(A \wedge \partial[dV]_r) \cdot I$는 $[dV]_r$의 테두리 $\partial[dV]_r$를 통해서 A만큼의 크기로 드나드는 어떤 물리량이다. $A \wedge \partial[dV]_r$에는 $\partial[dV]_r$에 수직한 A 성분만 곱해지고 평행한 성분은 쐐기 곱으로 상쇄된다. 거기에 I를 내적한 값이 $div(A) \cdot [dV]_r$이다.

만약 모든 점에서 $div(A) = 0$이라면, 어떤 물리량이 쌓이거나 새지 않고 흐른다는 뜻이다. 이때 A를 연속이라 한다.

Ⅱ. 맥스웰 방정식

벡터 퍼텐셜 A가 물리적 의미를 갖으려면 아래 조건이 필요하다.

1) A와 $curl(A)$가 존재해야 한다. 한 존재의 두 모습이다
2) A는 연속이다. $div(A) = 0$.
3) $curl^d(A)$도 존재한다. $curl(A)$에 대한 쌍대 차원의 존재이다. 새로운 존재가 아니라 동전의 뒷면 같은 것이다. 쌍대론.
4) 그리고 1)과 같은 이유로 $curl\{curl^d(A)\} = div\{curl(A)\} = Lap(A) = J$도 존재한다.
   Lap는 라플라시언을 의미한다.
5) $curl^d(A)$도 연속이다.
   $div\{curl^d(A)\} = curl\{curl^{dd}(A)\} = \pm curl^2(A) = 0$ 부호는 차원에 따라 다르다.
6) 다음 두 식은 $curl$의 성질이다.
   $curl^2(A) = 0, \qquad curl(J) = curl\{Lap(A)\} = curl^2\{curl^d(A)\} = 0$

4 차원에 가능한 벡터 퍼텐셜은 네 가지이다. 읽기 쉽게 글꼴을 다르게 쓴다.

1-벡터장 $A = A_1\mathbb{e}^1 + A_2\mathbb{e}^2 + A_3\mathbb{e}^3 + A_t\mathbb{e}^t$

2-벡터장 $\mathcal{B} + \mathcal{E} = \mathcal{B}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + \mathcal{B}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + \mathcal{B}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + \mathcal{E}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{E}_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{E}_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

3-벡터장 $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{A}_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

0-벡터장 $\mathcal{v}$ 스칼라 벡터장

위 조건들만으로 1-벡터장 A에서 맥스웰 방정식을 유도하여 확인하고, 나머지 벡터장에서도 같은 작업을 반복한다.

직교좌표로 설명한다. 기저 $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \mathbb{e}_3, \mathbb{e}_t$와 역기저 $\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2, \mathbb{e}^3, \mathbb{e}^t$의 관계는 다음과 같다.

$$\mathbb{e}_i = \frac{\partial P}{\partial x^i}, \qquad \mathbb{e}_4 = \frac{\partial P}{\partial x^4} = \frac{\partial P}{\partial t} = \mathbb{e}_t, \qquad i, j = 1,2,3$$
$$\mathbb{e}_i \cdot \mathbb{e}_j = \delta_{ij}, \qquad \mathbb{e}^i \cdot \mathbb{e}_j = \delta^i_j, \qquad \mathbb{e}^i = \mathbb{e}_i$$
$$\mathbb{e}_t \cdot \mathbb{e}_t = \mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t = -1, \qquad \mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}_t = 1, \qquad \mathbb{e}^t = -\mathbb{e}_t$$

단위 유사 스칼라 $I = \mathbb{e}_1 \wedge \mathbb{e}_2 \wedge \mathbb{e}_3 \wedge \mathbb{e}_t = -\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t$

편미분 표기

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \partial_{\mu\nu} = \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \qquad \mu, \nu = 1,2,3,4$$

$$\Box = \partial_{tt} - \partial_{11} - \partial_{22} - \partial_{33}, \qquad \textit{파동연산자}$$

1. 1-벡터장

다시 한번 벡터장은 역기저로 표현하는 게 옳다.

$$A = A_1\mathbb{e}^1 + A_2\mathbb{e}^2 + A_3\mathbb{e}^3 + A_t\mathbb{e}^t = A^1\mathbb{e}_1 + A^2\mathbb{e}_2 + A^3\mathbb{e}_3 + A^t\mathbb{e}_t$$

$$A_i = A^i, \qquad A_t = -A^t = -\varphi$$

$$curl(A) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu A = B + E, \qquad \mu = 1,2,3,4$$

$$= (\partial_2 A_3 - \partial_3 A_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_3 A_1 - \partial_1 A_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$+(\partial_1 A_t - \partial_t A_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_2 A_t - \partial_t A_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_3 A_t - \partial_t A_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$= B_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + B_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + B_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + E_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + E_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + E_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

B: *자기장*, E: *전기장*

$$curl^2(A) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu\{curl(A)\}$$

$$= (\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2 + \partial_3 B_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 + \partial_t B_1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$+(\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 + \partial_t B_2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 + \partial_t B_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

패러데이 전자기 유도 법칙, 아래 관행적 표현은 1-벡터 항이지만, 실제는 3-벡터 항이다.

$$\nabla \cdot B = 0, \qquad \nabla \times E + \partial_t B = 0$$

$$A^d = A \cdot I = -A_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - A_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - A_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - A_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$

$$div(A) = curl\{A^d\} = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu A^d = (\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t)I = 0$$

로렌츠 게이지 조건, 실제는 유사 스칼라 항이다.

$$\nabla \cdot A + \partial_t \varphi = 0$$

$$curl^d(A) = curl(A) \cdot I$$

$$= E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + E_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + E_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) - B_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - B_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - B_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$J = Lap(A) = div\{curl(A)\} = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu\{curl^d(A)\}$$

$$= (\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - (\partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \partial_t E_1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$-(\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3 - \partial_t E_2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - (\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1 - \partial_t E_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$= -J_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - J_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$J_t = -\rho$: *전하밀도*, J_i: *전류밀도*

가우스 법칙과 암페어-맥스웰의 법칙, 실제는 3-벡터 항이다.

$$\nabla \cdot E = -J_t = \rho, \qquad \nabla \times B = J + \partial_t E$$

앞의 식의 E_i, B_j 를 A_μ 로 치환하자.

$$-J_t = \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = \partial_{11}A_t - \partial_{1t}A_1 + \partial_{22}A_t - \partial_{2t}A_2 + \partial_{33}A_t - \partial_{3t}A_3$$

$$= \partial_{11}A_t + \partial_{22}A_t + \partial_{33}A_t - \partial_{tt}A_t - \partial_t(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t)$$

$$= \partial_{11}A_t + \partial_{22}A_t + \partial_{33}A_t - \partial_{tt}A_t = -\Box A_t$$

$$J_1 = \partial_2 B_3 - \partial_3 B_2 - \partial_t E_1 = \partial_{21}A_2 - \partial_{22}A_1 - \partial_{33}A_1 + \partial_{31}A_3 + \partial_{tt}A_1 - \partial_{t1}A_t$$

$$= \partial_{tt}A_1 - \partial_{11}A_1 - \partial_{22}A_1 - \partial_{33}A_1 + \partial_1(\partial_1 A_1 + \partial_2 A_2 + \partial_3 A_3 - \partial_t A_t) = \Box A_1$$

$$J_t = \Box A_t, \qquad J_1 = \Box A_1, \qquad J_2 = \Box A_2, \qquad J_3 = \Box A_3$$

$$curl(J) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu J = (\partial_1 J_1 + \partial_2 J_2 + \partial_3 J_3 - \partial_t J_t)I = 0$$

전하보존 법칙, 실제는 유사 스칼라 항이다.

$$\nabla \cdot J + \partial_t \rho = 0$$

2. 2-벡터장

$$\mathcal{B} + \mathcal{E} = \mathcal{B}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + \mathcal{B}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + \mathcal{B}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + \mathcal{E}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{E}_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{E}_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$curl(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = \mathcal{A}$$

$$= \mathcal{A}_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + \mathcal{A}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{A}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{A}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$\mathcal{A}_t = \partial_1\mathcal{B}_1 + \partial_2\mathcal{B}_2 + \partial_3\mathcal{B}_3, \qquad \mathcal{A}_1 = \partial_2\mathcal{E}_3 - \partial_3\mathcal{E}_2 + \partial_t\mathcal{B}_1$$

$$\mathcal{A}_2 = \partial_3\mathcal{E}_1 - \partial_1\mathcal{E}_3 + \partial_t\mathcal{B}_2, \qquad \mathcal{A}_3 = \partial_1\mathcal{E}_2 - \partial_2\mathcal{E}_1 + \partial_t\mathcal{B}_3$$

관행적 표현

$$\mathcal{A}_t = \nabla \cdot \mathcal{B}, \qquad \mathcal{A} = \nabla \times \mathcal{E} + \partial_t \mathcal{B}$$

$$curl^2(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu \mathcal{A} = (\partial_1\mathcal{A}_1 + \partial_2\mathcal{A}_2 + \partial_3\mathcal{A}_3 - \partial_t\mathcal{A}_t)(-I) = 0$$

관행적 표현

$$\nabla \cdot \mathcal{A} - \partial_t \mathcal{A}_t = 0$$

$$(\mathcal{B} + \mathcal{E})^d = (\mathcal{B} + \mathcal{E}) \cdot I$$

$$= \mathcal{E}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + \mathcal{E}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + \mathcal{E}_3(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - \mathcal{B}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - \mathcal{B}_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - \mathcal{B}_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$div(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = curl\{\mathcal{B}^d + \mathcal{E}^d\}$$

$$= (\partial_1\mathcal{E}_1 + \partial_2\mathcal{E}_2 + \partial_3\mathcal{E}_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - (\partial_2\mathcal{B}_3 - \partial_3\mathcal{B}_2 - \partial_t\mathcal{E}_1)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$-(\partial_3\mathcal{B}_1 - \partial_1\mathcal{B}_3 - \partial_t\mathcal{E}_2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - (\partial_1\mathcal{B}_2 - \partial_2\mathcal{B}_1 - \partial_t\mathcal{E}_3)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$$

관행적 표현

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0, \qquad \nabla \times \mathcal{B} - \partial_t \mathcal{E} = 0$$

$$curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = curl(\mathcal{B} + \mathcal{E}) \cdot I = -\mathcal{A}_1\mathbb{e}^1 - \mathcal{A}_2\mathbb{e}^2 - \mathcal{A}_3\mathbb{e}^3 - \mathcal{A}_t\mathbb{e}^t$$

$$\mathcal{J} = Lap(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = div\{curl(\mathcal{B} + \mathcal{E})\} = \mathbb{e}^\mu \wedge \partial_\mu\{curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})\}$$

$$= (\partial_3\mathcal{A}_2 - \partial_2\mathcal{A}_3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_1\mathcal{A}_3 - \partial_3\mathcal{A}_1)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + (\partial_2\mathcal{A}_1 - \partial_1\mathcal{A}_2)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$

$$+(\partial_t\mathcal{A}_1-\partial_1\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+(\partial_t\mathcal{A}_2-\partial_2\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)+(\partial_t\mathcal{A}_3-\partial_3\mathcal{A}_t)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$

$$=-\mathcal{K}_1(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)-\mathcal{K}_2(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1)-\mathcal{K}_3(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2)+\mathcal{L}_1(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{L}_2(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)+\mathcal{L}_3(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$

$\mathcal{K}_i$: *스핀밀도*, $\mathcal{L}_i$: *스핀류밀도*

관행적 표현

$$-\mathcal{K}=\nabla\times\mathcal{A},\qquad -\mathcal{L}=\nabla\mathcal{A}_t-\partial_t\mathcal{A}$$

앞의 식의 $\mathcal{A}_\mu$ 를 $\mathcal{B}_i,\mathcal{E}_j$ 로 치환하자.

$$\mathcal{K}_1=\partial_2\mathcal{A}_3-\partial_3\mathcal{A}_2=\partial_2(\partial_1\mathcal{E}_2-\partial_2\mathcal{E}_1+\partial_t\mathcal{B}_3)-\partial_3(\partial_3\mathcal{E}_1-\partial_1\mathcal{E}_3+\partial_t\mathcal{B}_2)$$

$$=-\partial_{22}\mathcal{E}_1-\partial_{33}\mathcal{E}_1+\partial_t(\partial_2\mathcal{B}_3-\partial_3\mathcal{B}_2)+\partial_1(\partial_2\mathcal{E}_2+\partial_3\mathcal{E}_3)$$

$$=-\partial_{22}\mathcal{E}_1-\partial_{33}\mathcal{E}_1+\partial_t(\partial_t\mathcal{E}_1)-\partial_1(\partial_1\mathcal{E}_1)=\Box\mathcal{E}_1,\qquad \nabla\cdot\mathcal{E}=0,\qquad \nabla\times\mathcal{B}-\partial_t\mathcal{E}=0$$

$$\mathcal{K}_1=\Box\mathcal{E}_1,\qquad \mathcal{K}_2=\Box\mathcal{E}_2,\qquad \mathcal{K}_3=\Box\mathcal{E}_3$$

$$\mathcal{L}_1=-(\partial_1\mathcal{A}_t-\partial_t\mathcal{A}_1)=-\partial_1(\partial_1\mathcal{B}_1+\partial_2\mathcal{B}_2+\partial_3\mathcal{B}_3)+\partial_t(\partial_2\mathcal{E}_3-\partial_3\mathcal{E}_2+\partial_t\mathcal{B}_1)$$

$$=-\partial_{11}\mathcal{B}_1+\partial_{tt}\mathcal{B}_1-\partial_2(\partial_1\mathcal{B}_2-\partial_t\mathcal{E}_3)-\partial_3(\partial_1\mathcal{B}_3+\partial_t\mathcal{E}_2)$$

$$=-\partial_{11}\mathcal{B}_1+\partial_{tt}\mathcal{B}_1-\partial_2(\partial_2\mathcal{B}_1)-\partial_3(\partial_3\mathcal{B}_1)=\Box\mathcal{B}_1,$$

$$\mathcal{L}_1=\Box\mathcal{B}_1,\qquad \mathcal{L}_2=\Box\mathcal{B}_2,\qquad \mathcal{L}_3=\Box\mathcal{B}_3$$

$$curl(\mathcal{J})=curl(\mathcal{K}+\mathcal{L})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu(\mathcal{K}+\mathcal{L})$$

$$=-(\partial_1\mathcal{K}_1+\partial_2\mathcal{K}_2+\partial_3\mathcal{K}_3)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+(\partial_2\mathcal{L}_3-\partial_3\mathcal{L}_2-\partial_t\mathcal{K}_1)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)$$

$$+(\partial_3\mathcal{L}_1-\partial_1\mathcal{L}_3-\partial_t\mathcal{K}_2)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+(\partial_1\mathcal{L}_2-\partial_2\mathcal{L}_1-\partial_t\mathcal{K}_3)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)=0$$

관행적 표현

$$\nabla\cdot\mathcal{K}=0,\qquad \nabla\times\mathcal{L}-\partial_t\mathcal{K}=0$$

3. 3-벡터장

$$\mathbb{A}=-\mathbb{A}_1\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t-\mathbb{A}_2\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t-\mathbb{A}_3\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t-\mathbb{A}_t\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3$$

$$curl(\mathbb{A})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu\mathbb{A}=\mathbb{V}I\qquad\qquad \mathbb{V}=-\partial_t\mathbb{A}_t+\partial_1\mathbb{A}_1+\partial_2\mathbb{A}_2+\partial_3\mathbb{A}_3$$

$$curl^2(\mathbb{A})=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu\mathbb{V}=null$$

$$\mathbb{A}^d=\mathbb{A}\cdot I=\mathbb{A}_1\mathbb{e}^1+\mathbb{A}_2\mathbb{e}^2+\mathbb{A}_3\mathbb{e}^3+\mathbb{A}_t\mathbb{e}^t$$

$$div(\mathbb{A})=curl(\mathbb{A}^d)=\mathbb{e}^\mu\wedge\partial_\mu\mathbb{A}^d$$

$$=(\partial_2\mathbb{A}_3-\partial_3\mathbb{A}_2)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^3)+(\partial_3\mathbb{A}_1-\partial_1\mathbb{A}_3)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^1)+(\partial_1\mathbb{A}_2-\partial_2\mathbb{A}_1)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^2)$$

$$+(\partial_1\mathbb{A}_t-\partial_t\mathbb{A}_1)(\mathbb{e}^1\wedge\mathbb{e}^t)+(\partial_2\mathbb{A}_t-\partial_t\mathbb{A}_2)(\mathbb{e}^2\wedge\mathbb{e}^t)+(\partial_3\mathbb{A}_t-\partial_t\mathbb{A}_3)(\mathbb{e}^3\wedge\mathbb{e}^t)=0$$

관행적 표현

$$\nabla\times\mathbb{A}=0,\qquad \nabla\mathbb{A}_t-\partial_t\mathbb{A}=0$$

$$curl^d(\mathbb{A})=\mathbb{V}I^d=\mathbb{V}$$

$\mathbb{J} = Lap(\mathbb{A}) = div\{curl(\mathbb{A})\} = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\{curl^{d}(\mathbb{A})\}$

$= \partial_1 \mathbb{V}\mathbb{e}^1 + \partial_2 \mathbb{V}\mathbb{e}^2 + \partial_3 \mathbb{V}\mathbb{e}^3 + \partial_t \mathbb{V}\mathbb{e}^t = \mathbb{J}_1\mathbb{e}^1 + \mathbb{J}_2\mathbb{e}^2 + \mathbb{J}_3\mathbb{e}^3 + \mathbb{J}_t\mathbb{e}^t$

$\mathbb{J}_i$: *색밀도*, $\mathbb{J}_t$: *히그스밀도*

관행적 표현

$\mathbb{J} = \nabla\mathbb{V}, \quad \mathbb{J}_t = \partial_t \mathbb{V}$

앞의 식의 $\mathbb{V}$를 $\mathbb{A}_{\mu}$로 치환하자.

$\mathbb{J}_1 = \partial_1 \mathbb{V} = \partial_1(\partial_t \mathbb{A}_t - \partial_1 \mathbb{A}_1 - \partial_2 \mathbb{A}_2 - \partial_3 \mathbb{A}_3) = \partial_{t1}\mathbb{A}_t - \partial_{11}\mathbb{A}_1 - \partial_{21}\mathbb{A}_2 - \partial_{31}\mathbb{A}_3$

$= \partial_{tt}\mathbb{A}_1 - \partial_{11}\mathbb{A}_1 - \partial_{22}\mathbb{A}_1 - \partial_{33}\mathbb{A}_1 = \Box\mathbb{A}_1$

$\mathbb{J}_t = \partial_t \mathbb{V} = \partial_t(\partial_t \mathbb{A}_t - \partial_1 \mathbb{A}_1 - \partial_2 \mathbb{A}_2 - \partial_3 \mathbb{A}_3) = \partial_{tt}\mathbb{A}_t - \partial_{1t}\mathbb{A}_1 - \partial_{2t}\mathbb{A}_2 - \partial_{3t}\mathbb{A}_t$

$= \partial_{tt}A_t - \partial_{11}\mathbb{A}_t - \partial_{22}\mathbb{A}_t - \partial_{33}\mathbb{A}_t = \Box\mathbb{A}_t$

$\mathbb{J}_1 = \Box\mathbb{A}_1, \quad \mathbb{J}_2 = \Box\mathbb{A}_2, \quad \mathbb{J}_3 = \Box\mathbb{A}_3, \quad \mathbb{J}_t = \Box\mathbb{A}_t$

$curl(\mathbb{J}) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}(\mathbb{J}) = 0$

$(\partial_2\mathbb{J}_3 - \partial_3\mathbb{J}_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (\partial_3\mathbb{J}_1 - \partial_1\mathbb{J}_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\partial_1\mathbb{J}_2 - \partial_2\mathbb{J}_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = 0$

$(\partial_1\mathbb{J}_t - \partial_t\mathbb{J}_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\partial_2\mathbb{J}_t - \partial_t\mathbb{J}_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) = (\partial_3\mathbb{J}_t - \partial_t\mathbb{J}_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

관행적 표현

$\nabla \times \mathbb{J} = 0, \quad \nabla\mathbb{J}_t - \partial_t\mathbb{J} = 0$

4. 스칼라 벡터장

$curl(v) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} v = a, \quad a = a_1\mathbb{e}^1 + a_2\mathbb{e}^2 + a_3\mathbb{e}^3 + a_t\mathbb{e}^t$

$a_1 = \partial_1 v, \quad a_2 = \partial_2 v, \quad a_3 = \partial_3 v, \quad a_t = \partial_t v$

$curl^2(v) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} a = 0$

$(\partial_2 a_3 - \partial_3 a_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + (\partial_3 a_1 - \partial_1 a_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + (\partial_1 a_2 - \partial_2 a_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) +$

$(\partial_1 a_t - \partial_t a_1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_2 a_t - \partial_t a_2)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + (\partial_3 a_t - \partial_t a_3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

관행적 표현

$\nabla \times a = 0, \quad \nabla a_t - \partial_t a = 0$

$v^d = v1^d = vI$

$div(v) = curl(v^d) = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu} vI = null$

$curl^d(v) = curl(v) \cdot I$

$= -a_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - a_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - a_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - a_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$

$j = Lap(v) = div\{curl(v)\} = \mathbb{e}^{\mu} \wedge \partial_{\mu}\{curl^d(v)\} = (-\partial_t a_t + \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 + \partial_3 a_3)I = -mI$

$m = \partial_t a_t - \nabla \cdot a, \quad m$: *질량밀도*

앞의 식의 a_{μ}를 v로 치환하자. 하자.

$m = \partial_t a_t - \nabla \cdot a = \partial_{tt} v - \partial_{11} v - \partial_{22} v - \partial_{33} v = \Box v$

$m = \Box v$

$curl(j) = e^{\mu} \wedge \partial_\mu j = e^{\mu} \wedge \partial_\mu (mI) = null$

Ⅲ. 결론

벡터장 A는 파동성을 띠고, $J = Lap(A)$는 입자성을 띤다. 한 존재의 두 모습이다. 서로 쌍대 차원이다. 쌍대성. $J = Lap(A) = div\{curl(A)\} \neq 0$이면 $curl(A)$가 연속이 아니라는 뜻이다. 입자는 $curl(A)$가 쌓이거나 새나가는 현상이다. 다음을 알 수 있다.

1) 색은 끈의 개념이다. 색밀도 :e^1, e^2, e^3
2) 스핀은 막의 개념이다. 스핀밀도 :$(e^2 \wedge e^3), (e^3 \wedge e^1), (e^1 \wedge e^2)$
3) 전하는 알갱이의 개념이다. 전하밀도 :$(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)$
4) 질량의 차원은 유사 스칼라이다. 시간이 흘러야 존재한다. 질량밀도 :$(-e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^t)$
5) 히그스밀도 e^t는 질량을 만드는 데 꼭 필요하다.
6) 전자의 스핀은 전하가 회전해서 만들어지는 게 아니다.
7) 전하를 고려하면 양성자에 쿼크 세 개가 있는 것은 우연이 아니다. 그렇다고 쿼크에 전하가 존재하는 것은 아니다.
8) 양전하와 음전하는 기하적 차이이다. $(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3) = -(e^2 \wedge e^1 \wedge e^3)$

반대로 질문도 생긴다.

1) 전자$(e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)$의 스핀$(e^2 \wedge e^3), (e^3 \wedge e^1), (e^1 \wedge e^2)$은 전하의 일부분 모습인가?
2) 양성자 중성자는 있는데 음성자는 없을까?
3) 음질량이 없는 이유?
4) 전류는 전하가 움직이는 것이지만 전류밀도$(e^i \wedge e^j \wedge e^t)$의 차원을 보면 초전도체는 상태이다. 아마 스핀이 잘 정렬된 상태에 시간이 흐르는 건가?

Ⅳ. 서론(2)

에너지 밀도를 다중벡터로 표현하려면 벡터 노름의 새로운 정의가 필요하다. 한 벡터에 그것의 쌍대 벡터를 곱하면 그 값은 유사 스칼라가 되고 크기는 계수들의 제곱의 합이 된다고 가정하자. 즉 그 벡터의 노름이 된다고 정의하자. 예를 들어

$v = 2e^1, \qquad v^d = 2(-e^2 \wedge e^3 \wedge e^t)$

$\|v\| = vv^d = (2)^2 e^1(-e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) = (2)^2 I$

그러면 $e^1(-e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) = I$인 곱셈표 하나가 구해진다. 이 생각을 임의의 벡터로 확장하면 나머지 곱셈표가 구해진다.

1. 기본 곱셈

$e^1(-e^2 \wedge e^3 \wedge e^t) = e^2(-e^3 \wedge e^1 \wedge e^t)$

$= e^3(-e^1 \wedge e^2 \wedge e^t) = e^t(-e^1 \wedge e^2 \wedge e^3)$

$= (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^2)$
$= (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(-\mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(-\mathbb{e}^t) = I$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$
$= (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = I$

1-벡터와 3-벡터의 곱은 교환적이고 2-벡터와 2-벡터의 곱은 비교환적이다. 곱셈에 교환법칙과 결합법칙이 성립하지는 않는다.

$I = 1I = 1\{1^d\} = I1 = I\{I^d\}, \qquad 1^d = I, \qquad I^d = 1$

2. 기저들의 제곱

$vv^d = (I + 2)(1 + 2I) = ((1)^2 + (2)^2)I + 2(1 + I^2) = \|v\| = \{(1)^2 + (2)^2\}I$
$1^2 + I^2 = 0, \qquad I^2 = -1$

$vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^1)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$
$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^1 + (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = 0$
$(\mathbb{e}^1)^2 = (\mathbb{e}^2)^2 = (\mathbb{e}^3)^2 = (\mathbb{e}^t)^2 = -1$
$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)^2 = 1$

부호가 반대여도 가능하지만 나중에 중력을 설명하려면 이 값이다.

$vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$
$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 0$
$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)^2 = 1$
$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)^2 = 1$

−1도 가능하지만 로런츠 변환과 파울리 스핀 행렬을 설명하려면 +1이다. 이 부호가 시공간을 결정한다. +1이면 쌍곡선 기하이고, −1이면 타원기하이다. 곧 설명한다.

먼저 차원에 따라 곱셈의 특성이 다르므로 기저를 구분하여 표시하자.

$\mathbb{b}_1 = \{\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2, \mathbb{e}^3, \mathbb{e}^t\}$
$\mathbb{b}_2 = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1), (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}$
$\mathbb{b}_3 = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}$

3. $\mathbb{b}_i I$, $I\mathbb{b}_i$

$vv^d = (\mathbb{e}^1 + 2)\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2I\} = ((1)^2 + (2)^2)I + 2(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\mathbb{e}^1 I$
$vv^d = \{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2I\}(\mathbb{e}^1 + 2) = ((1)^2 + (2)^2)I + 2(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2I\mathbb{e}^1$
$\mathbb{e}^1 I = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t), \qquad I\mathbb{e}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\}\{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2I\} = ((1)^2 + (2)^2)I$
$vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2I\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\} = ((1)^2 + (2)^2)I$
$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)I = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2), \qquad I(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

$vv^d = \{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\}\{-\mathbb{e}^1 + 2I\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{-\mathbb{e}^1 + 2I\}\{(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)I = \mathbb{e}^1$ $\qquad$ $I(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^1$

4. $\mathbb{b}_i\mathbb{b}_j$

$\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3$의 곱셈은 내적으로 공통인 기저를 상쇄한다. 경우에 따라 부호를 바꾼다.

$(\ldots \wedge \mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r \wedge \ldots) = \pm(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)\{(\ldots \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^r \wedge \ldots)\}, \qquad p,q,r,s = 1,2,3,t$

5. $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_3\mathbb{b}_3$

$\mathbb{e}^p\mathbb{e}^q = (\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)$

$\mathbb{e}^q\mathbb{e}^p = (\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p) = -(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)$ 반교환

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^s) = -(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^s)$

$= -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^s) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)\mathbb{e}^r\mathbb{e}^s = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s)$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^s)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^s \wedge \mathbb{e}^r)$ 반교환

$vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^2)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 + (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2) = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2)$

$= -(\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

$vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^t + (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^1\mathbb{e}^t = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$

$= -(\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^1\mathbb{e}^t = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)$

6. $\mathbb{b}_2\mathbb{b}_2$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^q)$ 반교환

파울리 스핀 행렬은 4 원수에 다름 아니다.

$\mathbb{s}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), \qquad \mathbb{s}^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1), \qquad \mathbb{s}^3 = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$

$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^2\mathbb{e}^1 = -(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = -\mathbb{s}^3$

$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = 1, \qquad \mathbb{s}^2\mathbb{s}^2 = \mathbb{s}^3\mathbb{s}^3 = 1$

$\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3 = -\mathbb{s}^3\mathbb{s}^2 = -\mathbb{s}^1, \qquad \mathbb{s}^3\mathbb{s}^1 = -\mathbb{s}^3\mathbb{s}^1 = -\mathbb{s}^2, \qquad \mathbb{s}^1\mathbb{s}^2 = -\mathbb{s}^2\mathbb{s}^1 = -\mathbb{s}^3$

$\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3 = (\mathbb{s}^1\mathbb{s}^2)\mathbb{s}^3 = \mathbb{s}^1(\mathbb{s}^2\mathbb{s}^3) = -1$

$vv^d = \{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) - (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \cdot \mathbb{e}^1)\mathbb{e}^2\mathbb{e}^3 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^2\mathbb{e}^3 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

7. $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_3$, $\mathbb{b}_3\mathbb{b}_1$

$\mathbb{e}^p(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = (\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)\mathbb{e}^p = (\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^p)\mathbb{e}^p = (\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$ 교환

$vv^d = (\mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2)\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \cdot \mathbb{e}^1)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}(\mathbb{e}^t + 2\mathbb{e}^2) = ((1)^2 + (2)^2)I$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^2 + (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t = 0$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^2 = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^2 = (\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^t = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = -(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$

8. $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_2$, $\mathbb{b}_2\mathbb{b}_3$

$\mathbb{e}^p(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = (\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)\mathbb{e}^q$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)\mathbb{e}^p = -(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)\mathbb{e}^p = -\mathbb{e}^q$ 반교환

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)\mathbb{e}^r = -\mathbb{e}^q$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = -(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^q \cdot \mathbb{e}^q)\mathbb{e}^r = -\mathbb{e}^q$

$vv^d = \{\mathbb{e}^2 + 2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}\{\mathbb{e}^2 + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) - (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^2 + (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = -\mathbb{e}^2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^1) = -(\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^1 = -\mathbb{e}^1$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^2 = (\mathbb{e}^2 \cdot \mathbb{e}^2)\mathbb{e}^1 = \mathbb{e}^1$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1 = -\mathbb{e}^1$

$(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^3 \cdot \mathbb{e}^3)(\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^1 = -\mathbb{e}^1$

9. $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_2$, $\mathbb{b}_2\mathbb{b}_3$

$\mathbb{e}^p(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r) = (\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$

$(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)\mathbb{e}^p = (\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^p) = (\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^r)$ 교환

특별히 다음 곱셈은 공통인 기저를 상쇄하면서 부호를 바꾼다.

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s) = -(\mathbb{e}^q \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s) = (\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)\mathbb{e}^q(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s)$

$(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = (\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s \wedge \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^p \wedge \mathbb{e}^q) = -(\mathbb{e}^p \cdot \mathbb{e}^p)(\mathbb{e}^r \wedge \mathbb{e}^s)\mathbb{e}^q$ 반교환

$vv^d = \{\mathbb{e}^1 + 2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\}\{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$vv^d = \{(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\}\{\mathbb{e}^1 + 2(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = ((1)^2 + (2)^2)I$

$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1 + (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = 0$

$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1 = (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = -(\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = \mathbb{e}^1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^t \wedge \mathbb{e}^1) = (\mathbb{e}^t \cdot \mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1$

$= -(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)\mathbb{e}^1$

정리하면 $1, \mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \mathbb{b}_3, I$의 합집합은 16 원수이고, 다시 그 중에서 $1, \mathbb{b}_2, I$의 합집합은 8 원수이고, 그리고 그 중에서 $1, (\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2), (\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3), (\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$는 4 원수이다.

10. 벡터 노름의 크기

한 차원의 기저들 제곱은 모두 $+1$이거나 -1이다. 차원에 따라 다르다. 그리고 $\mathbb{b}_1\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2\mathbb{b}_2$, $\mathbb{b}_3\mathbb{b}_3$의 곱셈은 모두 반교환적이다. 그래서 한 차원의 기저로 이루어진 벡터 노름의 크기를 그 벡터의 제곱으로 표시할 수 있다. 예를 들면

$v = \mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2 + 3\mathbb{e}^t$

$v^2 = (\mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2 + 3\mathbb{e}^t)(\mathbb{e}^1 + 2\mathbb{e}^2 + 3\mathbb{e}^t)$

$= (\mathbb{e}^1)^2 + (2\mathbb{e}^2)^2 + (3\mathbb{e}^t)^2 + 2(\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 + \mathbb{e}^2\mathbb{e}^1) + 6(\mathbb{e}^2\mathbb{e}^t + \mathbb{e}^t\mathbb{e}^2) + 3(\mathbb{e}^1\mathbb{e}^2 + \mathbb{e}^2\mathbb{e}^1)$

$= -\{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2\}$ 차원에 따라 부호가 다를 수 있다.

쌍대 벡터도 기저만 다를 뿐 계수는 같다. 그래서 어떤 벡터 노름의 크기를 그 쌍대 벡터의 제곱으로 표시할 수도 있다.

$v^d = v \cdot I = 1(-\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) + 2(-\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + 3(-\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$

$\{v^d\}^2 = \{(1)^2 + (2)^2 + (3)^2\}$

11. 회전자

$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = \mathbb{e}^2, \qquad \mathbb{e}^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = -\mathbb{e}^1$

$\mathbb{e}^1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^t, \qquad \mathbb{e}^t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) = \mathbb{e}^1$

평면 $(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$ 위의 basis $\mathbb{e}^1, \mathbb{e}^2$를 $\Delta \ll 1$만큼 회전시키는 방법.

$\mathbb{e}^{1\prime} = \mathbb{e}^1 R = \mathbb{e}^1\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = \mathbb{e}^1 + \Delta\mathbb{e}^2, \qquad R = \{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}$

$\mathbb{e}^{2\prime} = \mathbb{e}^2 R = \mathbb{e}^2\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} = \mathbb{e}^2 - \Delta\mathbb{e}^1$

작은 회전을 연속하면 회전자 R이 된다.

$$R = \{1 + \Delta_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}\{1 + \Delta_2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\} \dots$$
$$= \lim_{\Delta \to 0}\{1 + \Delta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\}^{\frac{\theta}{\Delta}} = e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\theta}$$
$$= 1 + \theta(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) + \frac{1}{2!}\theta^2(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 + \frac{1}{3!}\theta^3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^3 + \cdots$$
$$= \begin{cases} cosh\,\theta + sinh\,\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) & ((\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = +1) \\ cos\,\theta + sin\,\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) & ((\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2 = -1) \end{cases}$$

$(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)^2$의 이 부호에 따라 쌍곡선기하와 타원기하로 나뉜다.

만약 $R = e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta}$이고 $\tanh\theta = \beta = v/c$이면 로런츠 변환이다.

$$\mathbb{e}^{1\prime} = \mathbb{e}^1 R = \mathbb{e}^1 e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta} = \mathbb{e}^1\{cosh\,\theta + sinh\,\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = \mathbb{e}^1\,cosh\,\theta + \mathbb{e}^t\,sinh\,\theta$$
$$\mathbb{e}^{t\prime} = \mathbb{e}^t R = \mathbb{e}^t e^{(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\theta} = \mathbb{e}^t\{cosh\,\theta + sinh\,\theta\,(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\} = \mathbb{e}^t\,cosh\,\theta + \mathbb{e}^1\,sinh\,\theta$$

주의할 점은 좌표가 아니라 기저의 변환이다.

$$x'\mathbb{e}^{1\prime} + t'\mathbb{e}^{t\prime} = x\mathbb{e}^1 + t\mathbb{e}^t$$

IV. 결론(2), 에너지밀도와 힘

전자기학의 관행적 에너지 밀도 $eng(A)$는 아래와 같다.

$$eng(A) = \frac{1}{2}(B^2 + E^2) = \frac{1}{2}\{(B_i)^2 + (E_i)^2\}, \qquad i = 1,2,3$$

여기서는 $curl(A) = B + E$의 벡터 노름에 다름 아니다. 따라서 에너지 밀도는 유사 스칼라이다.

$$eng(A) = \frac{1}{2}\|curl(A)\| = \frac{1}{2}curl(A)curl^d(A)$$

힘은 에너지 밀도가 연속하지 않으면 생기는 현상이다.

$$F = -div\{eng(A)\} = -curl\{eng^d(A)\}$$

$eng^d(A)$는 $eng(A)$의 크기이다. $curl(A)$ 노름의 크기이다. 이는 다시 $curl^d(A)$ 노름의 크기이기도 하다. 차원에 따라 부호가 바뀔 수 있다.

$$eng^d(A) = \frac{1}{2}\{curl(A)\}^2 \quad or \quad \frac{1}{2}\{curl^d(A)\}^2$$

벡터장 X, Y에 대해 다음은 불편하지 않다. 벡터는 수이다.

$$curl(XY) = \{curl(X)\}Y + X\{curl(Y)\}$$

힘의 정의가 가능한 $eng^d(A)$는 두 번째이다. 첫 번째는 $curl^2(A) = 0$이기 때문이다.

$$F = -\frac{1}{2}curl(\{curl^d(A)\}^2) = -\frac{1}{2}\Big\{curl\{curl^d(A)\}curl^d(A) + curl^d(A)curl\{curl^d(A)\}\Big\}$$
$$= -\frac{1}{2}\{Lap(A)curl^d(A) + curl^d(A)Lap(A)\} = -\frac{1}{2}\{Jcurl^d(A) + curl^d(A)J\}$$

$Jcurl^d(A) + curl^d(A)J$의 항들 중에서 1-벡터항만이 힘이다. 힘은 $eng^d(A)$의 $curl$이기 때문이다. 힘은 에너지 밀도가 연속하지 않는 곳, $Lap(A) = J \neq 0$인 곳, 즉 $curl(A)$가 연속하지 않는 곳, 입자가 있는 곳에 생긴다. 전자기력부터 확인하고 다른 차원의 벡터장으로 확장하자.

1. 전자기력

Ⅲ.1 에서 $curl^d(A)$는 2-벡터이고 J는 3-벡터이다. 이 곱셈은 교환적이다

$$eng^d(A) = \frac{1}{2}\{curl^d(A)\}^2, \qquad F = -Jcurl^d(A)$$

$$J = -J_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - J_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$curl^d(A) = E^d + B^d = E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) + E_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) + E_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$
$$-B_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - B_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) - B_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$F_1\mathbb{e}^1 = J_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$
$$-J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)B_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$
$$-J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)B_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = (-J_tE_1 + J_2B_3 - J_3B_2)\mathbb{e}^1 \qquad \text{5.K}$$

$$F_t\mathbb{e}^t = J_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)E_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3)$$
$$J_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)E_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)$$
$$J_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)E_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2) = (-J_1E_1 - J_2E_2 - J_3E_3)\mathbb{e}^t$$

관행적 표현. 여기서 $F_t\mathbb{e}^t$는 시간당 없어지는 전자기 에너지이다. 줄 열이다.

$$F = -J_tE + J \times B = \rho E + J \times B, \qquad F_t = -J \cdot E$$

2. 약력

Ⅲ.2 에서 $curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$는 1-벡터이고 $\mathcal{J}$는 2-벡터이다. 그리고 이 곱셈은 반교환적이다. 약력은 힘이 상쇄되는 것이다. 기하적 특성이다. 없어지는 에너지도 없다.

아마 약력은 용수철 누르거나 당기는 것과 같을 것이다. 나중에 용수철이 풀릴 때 관측된 현상이 우리가 아는 약력일 것이다. 그래도 힘은 계산해보자.

$$eng^d(A) = \frac{1}{2}\{curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})\}^2, \qquad F = -\mathcal{J}curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$$

$curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E})$는 1-vector 이라 다른 차원과 부호가 다르다.

$$\mathcal{J} = \mathcal{K} + \mathcal{L}$$
$$\mathcal{K} = -\mathcal{K}_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - \mathcal{K}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1) - \mathcal{K}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)$$
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{L}_2(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t) + \mathcal{L}_3(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t)$$
$$curl^d(\mathcal{B} + \mathcal{E}) = -\mathcal{A}_1\mathbb{e}^1 - \mathcal{A}_2\mathbb{e}^2 - \mathcal{A}_3\mathbb{e}^3 - \mathcal{A}_t\mathbb{e}^t$$

$$F_1\mathbb{e}^1 = \mathcal{L}_1(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t)\mathcal{A}_t\mathbb{e}^t - \mathcal{K}_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1)\mathcal{A}_3\mathbb{e}^3 - \mathcal{K}_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2)\mathcal{A}_2\mathbb{e}^2$$
$$= (-\mathcal{L}_1\mathcal{A}_t + \mathcal{K}_2\mathcal{A}_3 - \mathcal{K}_3\mathcal{A}_2)\mathbb{e}^1$$

관행적 표현

$$F = -\mathcal{L}\mathcal{A}_t + \mathcal{K} \times \mathcal{A}$$

3. 강력

Ⅲ.3 에서 $curl^d(\mathbb{A})$는 스칼라이고 $\mathbb{J}$는 1-벡터이다. 이 곱셈은 교환적이다.

$$eng^d(\mathbb{A}) = \frac{1}{2}\{curl^d(\mathbb{A})\}^2, \qquad F = -\mathbb{J}curl^d(\mathbb{A})$$

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_1 \mathbb{e}^1 + \mathbb{J}_2 \mathbb{e}^2 + \mathbb{J}_3 \mathbb{e}^3 + \mathbb{J}_t \mathbb{e}^t, \qquad curl^d(\mathbb{A}) = \mathbb{V}$$

$$F_1 \mathbb{e}^1 = -\mathbb{J}_1 \mathbb{e}^1 \mathbb{V} = -\mathbb{V}\mathbb{J}_1 \mathbb{e}^1, \qquad F_t \mathbb{e}^t = -\mathbb{J}_t \mathbb{e}^t \mathbb{V} = -\mathbb{V}\mathbb{J}_t \mathbb{e}^t$$

관행적 표현

$$F = -\mathbb{V}\mathbb{J}, \qquad F_t = -\mathbb{V}\mathbb{J}_t$$

수식으로는 color 밀도 자체가 힘이고, 히그스밀도는 시간당 없어지는 에너지로 보인다.

4. 중력

Ⅲ.4 에서 $curl^d(v)$는 3-벡터이고 j는 유사 스칼라이다. 이 곱셈은 교환적이다.

$$eng^d(v) = \frac{1}{2}\{curl^d(v)\}^2, \qquad F = -j\,curl^d(v)$$

$$j = -mI$$

$$curl^d(v) = -a_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) - a_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) - a_2(\mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^t) - a_3(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^t)$$

$$F_1 \mathbb{e}^1 = -mIa_1(\mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3 \wedge \mathbb{e}^t) = -ma_1 \mathbb{e}^1 = m(-\partial_1 v)\mathbb{e}^1$$

$$F_t \mathbb{e}^t = -mIa_t(\mathbb{e}^1 \wedge \mathbb{e}^2 \wedge \mathbb{e}^3) = -ma_t \mathbb{e}^t = m(-\partial_t v)\mathbb{e}^t$$

관행적 표현

$$F = -ma = -m(\nabla v), \qquad F_t = -m = -m(\partial_t v)$$

질량 m은 유사 스칼라 차원이다. 에너지밀도 차원이기도 하다. 잘 아는 운동에너지 $mv^2/2$와 위치에너지 mgh에서 v와 gh는 단지 시간과 길이의 비로 해석하는 게 맞다. 운동량 mv도 그렇다. 운동량보존 법칙이 아니라 또 하나의 에너지보존 법칙이다.